7

الحاسبات والمنطق

مهندس : محمّد بخيب العزّابي

الجماهيريّة لنظم الحاسب

طرابلس 1988



الحاسبات والمنطق

مهندس : محمّد نجيب العزّابي

الجماهيريّة لنظم الحاسب
طرابلس 1988

المحتويات

مقدمة

المنطق أهمية خاصة في علم الحاسب ، حيث يتداخل معه في عدة جوانب . فالبنية الالكترونيات لدارات الحاسب تعتمد على المنطق ، وكذلك البنية التصورية أي بنية البرنامج . إن كنا نرى اليوم العديد من صور المنطق . بمختلف التسميات ، إلا أن المنطق علم وفن قديم بدأ مع أول إنسان أراد تفسير الظواهر الطبيعية . وكان على مر العصور الأداة التي استخدمت لبلورة مفاهيم العلوم الجديدة . ولهذا تمّ تطويره وتغيرت مسمياته . إنه فن استخدمه افلاطون وسقراط . ثم الفارابي والغزالي ، وفن Venn ، وجورج بوول ، ومبدعوا التصاميم الالكترونية الحديثة . وفي كل هذه الحالات يبقى المنطق هو المنطق ، يختلف المظهر والجوهر واحد .

لسنا نود خوض غمار هذا البحر . ولكن نود في هذا الفصل إعطاء لمحة عن هذا العلم في اشكاله المتعددة لنتفهم الأساس الذي بنيت عليه التصاميم المنطقية ، وفن البرمجة .

علم بأسماء مختلفة :

من الأسماء التي نسمعها اليوم في وصف المنطق التالي :

1- المنطق الاستدلالي Reasoning

2- المنطق الحديث Modern reasoning

3- المنطق الرياضي Mathematical logic

4- المنطق الرقمي Digital logic

5- المنطق الرمزي Symbolic logic

6- المنطق التوافقي Combinational logic

7- المنطق التسلسلي Sequential logic

هذه أسماء ذات مفهوم عمومي ، واذا بحثنا اكثر سنجد أسماء لعلم المنطق تتخذ طابع الخصوص مثل : منطق المعالج الدقيق Microprocess or logic .

ما هو المنطق Logic:

تم تعريف المنطق على أنه «علم قوانين التفكير» . إلا أن هذا التعريف غير دقيق . لأن التفكير Thinking عملية يختص بدراستها علماء النفس بالدرجة الأولى . وبما أن المنطق لا يدخل في حقول علم النفس إذن هذا ليس بالتعريف السليم .

تعريف آخر لعلم المنطق بصفة بأنه «علم الاستدلال Reasoning» . إن كان هذا التعريف أصلح من سابقه إلّا أنه يظل قاصراً عن بلوغ الهدف . فالاستدلال نوع من التفكير الذي يدخل في اطار علم النفس وإهتماماته . فعندما يدرس علم النفس عملية التفكير هذه يجدها عملية معقدة تتداخل فيها الكثير من محاولات الصواب والخطأ ، وتحركها أهواء غير ذات علاقة ، وتحمل طياتها درجات عالية من العواطف والاحاسيس . وكل هذا لا يهم علم المنطق في شيء . فلا يهمه السبل التي يسلكها الدماغ أو العقل أثناء المجادلة (أو طرح القضية) إنما يهتم فقط بالقضية Argament بعد طرحها .

السؤال المطروح دائماً هو : هل القرار الذي تم التوصل اليه يتبع بالفعل من المقدمات Premisses : هل الافتراضات كلها صادقة ؟ القضية الجوهرية في علم المنطق إذن هي التمييز بين الاستدلال السليم بعد تكامل القضية المنطقية .

على ضوء ما سبق يمكن **تعريف المنطق** على أنه :

«علم يهتم بدراسة القواعد والنسق التي تستخدم لتمييز الاستدلال الصحيح من الخاطىء» .

الافتراضات Propositions:

الافتراض هو الخبر الذي يحتمل احدى حالتين : الصدق أو الكذب.أي اما يكون صحيحاً أو خاطئاً . مثل :

●الإنسان كائن حي .
●الخشب جماد .
●خالد بالبيت .

أما الجمل التي تكون في صورة سؤال ، أو هتاف ، أو أمر ، أو تعجب فلا تعتبر إفتراضات . لسبب بسيط هو انه لا يمكن الحكم عليها بانها صادقة (صحيحة) أو كاذبة (غير صحيحة) . من الأمثلة على هذا النوع :

●هل خرج خالد إلى الصيد ؟ (سؤال)
●ما أجمل الزهور ! (تعجب)
●تحيا الحرية . . يسقط الظلم (هتاف)
●إجلس على الكرسي (أمر)

الإفتراض هو أي جملة منطقية داخل القضية المنطقية المطروحة .

القضية Argument :

القضية المنطقية ليست مجرد مجموعة افتراضات عشوائية . إنما هي بناء (هيكل) منطقي منسق وبعناية . تتكون القضية المنطقية من مجموعة افتراضات منها ما يسمى بالمعطية Premiss أو المسلمات أو المقدمات Postulates . ومنها ما يسمى بالقرار (أو الناتج أو الخلاصة) Conclusion . وسميت كذلك لانها خلاصة الجدل .

من الامثلة على القضايا المنطقية نورد التالي :

مثال 1 :

كل إنسان فان . . . . معطية 1 (مقدمة كبرى)
سقراط إنسان . . . . معطية 2 (مقدمة صغرى)
∴ سقراط فان قرار (خلاصة القضية)

مثال 2 :

الأبطال اناس يضحون من اجل قضايا . . . . معطية 1
عمر المختار ضحى من أجل قضية . . . . معطية 2

.. عمر المختار بطل قرار

مثال 3 :

المعادن تتمدد بالحرارة معطية 1

الحديد معدن معطية 2

∴ الحديد يتمدد بالحرارة قرار

وقد رأينا البناء المنطقي للقضية ، عليه فان الافتراض المنفرد بنفسه لا يشكل معطية لانه لا يؤدي إلى قرار . ولا يكون قرار لأنه لا مقدمات له . وبالتالي فهو بذلك الشكل **لا يمثل قضية** .

القرار والمقدمات :

في الامثلة السابقة أوردنا المقدمات في البداية والقرار جاء في خاتمة القضية . ولكن ليس بالضرورة أن يكون الأمر على هذا النحو دائماً . فيمكن للقرار أن يأتي في بداية القضية .

مثال 1 :

يقول ماركيز دي ساد في كتابه (جولييت Juliet) :

«لكنهم يؤكدون أن الانسان يرغب في العيش داخل مجتمع . لهذا فعليه التنازل عن جزء من مصالحه الخاصة للصالح العام .»

المعطية الوحيدة هنا هي : الانسان يرغب في العيش داخل مجتمع .

القرار هو : عليه التنازل . . . .

في فن البرمجة يرمز إلى هذا النوع من الجدل بالتالي :

IF A THEN B

(إذا كانت آ إذن ب)

مثال 2 :

يقول آرثر بريزبان في كتابه (كتاب اليوم The Book of Today)

«إن وجود السور حول الجبانة (المدفن) أمر تافه . لأن من بالداخل لا يستطيعون الخروج . ومن بالخارج لا يرغبون الدخول» .

القرار هنا في المقدمة : وجود السور . . . .

المعطية الأولى كانت : من بالداخل . . . .

المعطية الثانية كانت : من بالخارج . . . .

في فن البرمجة يرمز لهذا النوع من القضايا بالتالي :

IF A AND B THEN C

(إذا كان آ و ب إذن جـ)

مثال 3 :

يقول أرسطو في كتابه (الشعريات Poetics) :

«الشعر أرقى وأعمق فلسفة من التاريخ . لأن الشعر يعبر عن الشمولية بينما يعبر التاريخ عن الخصوصيات» .

القرار هنا : الشعر أرق . . . .

المعطية الوحيدة هي : لأن الشعر يعبّر . . .

وهذا يتبع النمط الذي يستخدم في البرمجة على الشكل التالي :

A IF B

(آ إذا كانت ب)

مثال 4 :

يقول ايمانويل كانت في كتابه (المبادىء الاساسية لغيبيات علم الاخلاق)
: (The Fundamental Principles of the Metaphysics of Ethics)

«المحافظة على السعادة الشخصية واجب (duty) ولو بطريقة غير مباشرة . لأن عدم رضا الشخص عن حاله وسط ضغوط القلق والحاجة يُيسر له وباغراء شديد إنتهاك حرمة الواجبات» .

القرار : المحافظة على . . . .
المعطية : عدم رضا الشخص . . . .
وهذه أيضاً يتم برمجتها على النسق التالي :

A IF B

مثال 5 :

يقول موزيس ميمونيديس في كتابه (دليل المتحير The Guide for The perplexed) خلق الله الكون من لاشيء . . عندئذ لم يكن عنصر الزمن موجوداً ولكنه قد خلق . . فهو يعتمد على حركة الكون . والكون قد خلق» .

ونترك للقارىء البحث عن المعطيات والقرار في هذا المثال . ونكتفي بهذا القدر عن الاستدلال المنطقي لنلقي جانباً من الضوء على المنطق الرمزي .

*** المنطق الرمزي Symbolic Logic :**

في الفقرة السابقة ضربنا الامثلة عن القضايا المنطقية . وتم التعبير عنها باللغة الطبيعية . ولبساطة الامثلة لم نجد صعوبة في متابعة معطياتها وقراراتها . غير أنه ليست كل القضايا المنطقية على هذا النحو . ففي أحيان كثيرة تكون صعبة التخمين لتشابك الإفتراضات . ويأتي هذا التشابك من عدة عوامل أهمها غموض الالفاظ المستخدمة وميوعتها (أي احتمالها اكثر من معنى مثلا) . وحتى عندما تحل مسألة تخمين معاني الالفاظ يظل هناك عقبة رئيسية وهي مسألة القدرة على تقييم validatim التعدية ولتحاشي كل هذه الصعوبات تم بلورة لغة إصطناعية يكتب بها قضايا المنطق وتسمى اللغة الاصطناعية الرمزية Artifical Symbolic Language . وهي خالية من كل المؤثرات السابقة الذكر ، سهلة الإستعمال وفعالة .

*** الرموز في المنطق :**

المتغير variable هو رمز يعبّر عن افتراض معين في قضية منطقية وبدلاً من كتابة الإفتراض باللغة الطبيعية يوضع متغير دال عليها .

فمثلاً :
يمكن للمتغير A أن يعبر عن المعطية (كل إنسان فان)
والمتغير B أن يعبر عن المعطية (سقراط إنسان)
والمتغير C أن يعبر عن القرار (سقراط فان)
فيكون البناء العام للقضية كالتالي :

IF A AND B THEN C

بالطبع فان المتغير A يمكن استخدامه للتعبير عن أي افتراض في قضية منطقية اخرى .

*** الصح والخطأ (الصدق والصواب) :**

سبقت الاشارة إلى أن الافتراضات فقط هي التي يمكن تأكيد صحتها (صدقها) أو عدم صحتها (كذبها) . وهنا نجد أن المنطق يستخدم الرموز التالية :

إذا كانت المعطية صحيحة (صادقة) يرمز بها بالرمز T وهو اختصار True . أما إذا كانت المعطية كاذبة فيرمز لها بالرمز F وهو اختصار Faise . أما الرياضي فون لا يبنز فكان يدعو إلى استخدام الرمزين (1,0) . فمن خلال نزعته الصوفية كان يرى أن :

الرمز 1 يشير إلى الصدق والخير والبناء .
والرمز 0 يشير إلى الكذب والشر والدمار .
وبالفعل تم تبني هذه الفكرة في المنطق الحديث . وصار لهذا المفهوم أهمية خاصة في الجبر البوولي وتصميم الدوائر المنطقية .

بهذا فان المتغير A في المثال السابق يحتمل احدى حالتين :

فاما أن $A = T = 1$
أو أن $A = F = 0$

* العلاقة بين المتغيرات في القضية :

سبقت الإشارة إلى أنه ليس كل الإفتراضات بسيطة مثل : سقراط إنسان . في المثال السابق . ففي أحيان كثيرة يكون الافتراض جملة مركبة Compound من اكثر من جملة بسيطة . مثل :

1- خالد يحمل عصا أو خالد يحمل بندقية .
2- يوسف رجل أمين و يوسف رجل حكيم .

المثالين السابقين عبارة عن جملة مركبة من جملتين بسيطتين ، تربط بينهما أداة للربط (رابط) . كان الرابط في المثال الأول «أو» وفي المثال الثاني كان (و) .

في احيان كثيرة تكون الجملة منفية بإحدى أدوات النفي مثل : «ليس» و «ما» و «لا» . فالافتراض : ليس كل مقتول ميت . يمكن نفيه بالقول : ليس كل مقتول ميت . فيعطي النفي معكوس الجملة . بهذا صار لدينا ثلاثة أنواع من ادوات الربط تشكل ثلاث عمليات منطقية . هذه الروابط هي :

1- و . AND

فنقول (A AND B)

2- أو OR

فنقول (A OR B)

3- ليس NOT

فنقول (NOT B)

أما العلاقات المنطقية فهي :

1) الارتباط المنطقي باستخدام AND.
2) الفصل المنطقي باستخدام OR.
3) العكس المنطقي باستخدام NOT.

وللأهمية نتطرق إلى كل منها بايجاز .

***الارتباط المنطقي Logical Conjunction :**

الارتباط المنطقي عملية منطقية تتم باستخدام المعامل (أو الرابط) AND بين الجمل البسيطة في الجملة المركبة . مثل :

علي رجل أمين وعلي رجل حكيم

فاذا رمزنا إلى «علي رجل أمين» بالرمز A
وإلى «علي رجل حكيم» بالرمز B
يمكننا إعادة صياغة الجملة المنطقية بالشكل التالي :

A AND B

في المنطق الرمزي لا زال هناك مجال للترميز حيث يستخدم الرمز «$\wedge$» للدلالة على المعامل «AND» . وبهذا يشار إلى الجملة السابقة :

$$A \wedge B = A \text{ AND } B$$

أداة الربط $\wedge$ في عملية الارتباط المنطقي ذات دلالة تصديقية Truth functional بمعنى انه لو اخذنا أي متغيرين (p و q) فإن عملية الارتباط المنطقي بينهما ستنتج أربعة احتمالات للصدق والكذب . هذه الاحتمالات هي :

1)إذا كانت p صادقة و q صادقة فإن $p\wedge q$ تكون صادقة
2)إذا كانت p صادقة و q كاذبة فإن $p\wedge q$ تكون كاذبة
3)إذا كانت p كاذبة و q صادقة فإن $p\wedge q$ تكون كاذبة
4)إذا كانت p كاذبة و q كاذبة فإن $p\wedge q$ تكون كاذبة

فاذا رمزنا إلى كلمة صادقة بالرمز T وإلى كلمة كاذبة بالرمز F فان الاحتمالات السابقة يمكن وضعها في الجدول التالي وهو المسمى بجدول الصدق truth table .

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

من الجدول السابق نلاحظ أن القرار ($p \wedge q$) يكون صادقاً في حالة واحدة فقط وهي أن تكون المعطيات كلها صادقة .

عملية الارتباط المنطقي تسمى أيضاً عملية الضرب المنطقي logical multiplication وليس بالضرورة أن تحتوي هذه العملية على متغيرين فقط بل يمكن أن تتعداهما مثل :

$$a \wedge b \wedge q \wedge p = c$$

***الفصل المنطقي** Logical disjunction :

الفصل المنطقي عملية تتم باستخدام الرابط «او OR» . فنقول مثلاً :

1)علي مقيم في طرابلس أو علي مقيم في بنغازي

2)خالد موجود بالشركة أو خالد موجود بالبيت

الرابط «أو OR» إذن يجب أن يفصل بين الجمل فإما أن تتحقق هذه المعطية أو تلك ولا يمكن أن يتحقق الاثنان في آن واحد .

في المنطق الرمزي يستخدم الرمز «$\vee$» للدلالة على «OR» أي على عملية الفصل المنطقي . وبهذا فان الجملة «خالد موجود بالشركة أو خالد موجود بالبيت» يمكن أن يشار إليها بالتالي : $p \vee q$ حيث :

p = خالد موجود بالشركة .

و q = خالد موجود بالبيت .

عملية الفصل المنطقي بين متغيرين ستنتج اربعة احتمالات موضحة في جدول الصدق التالي :

p	q	p∨q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نلاحظ من الجدول السابق أن نتاج عملية الفصل المنطقي يكون كاذباً في حالة واحدة فقط وهي أن يكون جميع المتغيرات في العلاقة كاذبة . العملية (p∨q) أي الفصل المنطقي تسمى أيضاً عملية جمع منطقي Logical Addition . وتسمى ايضاً الاجمالي المنطقي Logical Sum . عملية الفصل المنطقي ليست مقصورة على متغيرين فقط ، فقد تتعداهما مثل :

$$a \vee b \vee q \vee p = m$$

فاذا كان أياً من المعطيات = T كانت m صادقة أي = T .

في بعض الاحيان وخاصة في الافتراضات المعبر عنها باللغة الطبيعية يتم استخدام كلمة «ما لم» (Unless) . وهذه أيضاً تعطي معنى OR . وتستخدم كأداة فصل منطقي . فنقول مثلا :

● سيقام الحفل ما لم تمطر .

أو

● ما لم تمطر فسيقام الحفل .

بمعنى : المطر أو اقامة الحفل (A ∨ B) .

*النفي Negation :

في اللغة الطبيعية يتم نفي الجملة المنطقية بادوات نفي مثل «لا» و«ليس» و«NOT» ويستعاض في المنطق الرمزي عن لفظ «NOT» باستخدام الرمز «~» ، يوضع قبل المتغير . فاذا كانت :

A = كل الرجال جبناء .

فان A ~ = ليس كل الرجال جبناء .

معامل النفي «~» له مدلول تصديقي . ففي المثال السابق نجد أنه :

إذا كانت A صادقة فإن A ~ تكون كاذبة .

وإذا كانت A كاذبة فإن A ~ تكون صادقة .

هذه الحقيقة يعبر عنها باستخدام جدول الصدق التالي :

B	~ B
T	F
F	T

نلاحظ من خلال الجدول السابق أنه لون نفينا (عكسنا) معكوس المتغير نرجع إلى المتغير الاصلي . أي أن :

$$\sim\sim B = B$$

ويمكن التعبير عن هذه العملية بجدول الصدق التالي :

B	~ B	~ ~ B
T	F	T
F	T	F

نلاحظ على أهمية استخدام جداول الصدق truth tables ، للتحقق من سلامة القضايا ومتابعة المعطيات . فيما يلي نضرب بعض الامثلة لتوضيح أوضاع مختلفة للعلاقات الثلاث المذكورة .

أمثلة عن الارتباط والفصل والنفي المنطقي :

مثال 1 : $C=(A\wedge B)\vee \sim B$

الخطوة الأولى : تحديد عناصر القضية (معطياتها) . وعددها في هذا المثال خمسة عناصر هي : A, B, $\sim B$, $A\wedge B$ ، والمتغير C الذي يساوي $(A\wedge B)\vee \sim B$.

الخطوة الثانية : تجهيز جدول الصدق يتضمن هذه العناصر . وهو كالتالي :

	A	B	$A\wedge B$	$\sim B$	$C=(A\wedge B)\vee\sim B$
1	T	T	T	F	T
2	T	F	F	T	T
3	F	T	F	F	F
4	F	F	F	T	T

من خلال الجدول السابق نجد أن المعطية «C» تكون صادقة منطقياً في ثلاث حالات فقط الأولى والثانية والرابعة . وغير صادقة في الحالة الثالثة . أي غندما تكون :

$F=A$ و $T=B$

مثال 2 : تحقق من صحة القضية المنطقية التالية :

$C=(A\vee B)\wedge(\sim A)$

الخطوة الأولى : نلاحظ أن عناصر القضية خمسة : A, $\sim A$, B, $A\vee B$, C .

حيث $(A\vee B)\wedge(\sim A)=C$

الخطوة الثانية : تجهيز جدول الصدق الذي يتضمن العناصر الخمسة المذكورة .

	A	B	~A	A∨B	C
1	T	T	F	T	F
2	T	F	F	T	F
3	F	T	T	T	T
4	F	F	T	F	F

من خلال جدول الصدق السابق نلاحظ أن المعطية C تكون صادقة منطقياً في حالة واحدة فقط وهي الحالة الثالثة . أي عندما تكون F=A و T=B .

مثال 3 : تحقق من صدق القضية المنطقية التالية :

$$C = A \vee (\sim A \wedge B)$$

عناصر القضية خمسة هي : C, (~A∧B), ~A, B, A جدول الصدق يكون كالتالي :

	A	B	~A	~A∧B	C
1	T	T	F	F	T
2	T	F	F	F	T
3	F	T	T	T	T
4	F	F	T	F	F

من الجدول السابق نلاحظ أن المعطية C تكون صادقة في الثلاث حالات الأولى وكاذبة في الاخيرة .

مثال 4 : إثبت أو انفي أن :

$$A \vee (\sim A \wedge B)=(A \wedge B) \vee (\sim B)$$

$$C = W$$

	A	B	~A	~B	A∧B	~A∧B	C	W
1	T	T	F	F	T	F	T	T
2	T	F	F	T	F	F	T	T
3	F	T	T	F	F	T	T	F
4	F	F	T	T	F	F	F	T

من خلال الجدول السابق نلاحظ أن W=C في ثلاث حالات (الاولى ، الثانية ، والرابعة) ولا يتساوى الاثنان في الحالة الثالثة . أي عندما تكون F=A و T=B

مثال 5 : اثبت أو انفي أن : $A \vee (\sim A \wedge B) = A \vee B$

نجد أن جدول الصدق لهذه المعادلة :

A	B	~A	~A∧B	A∨B	A∨(~A∧B)
T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	F

نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويين في جميع الحالة .

تمارين عامة :

1) تحقق من سلامة القضايا المنطقية التالية :

أ) $C= (\sim B \wedge A) \vee (A \wedge B)$

ب) $C= (\sim A \vee \sim B) \wedge (A \wedge B)$

جـ) $C = (\sim A \wedge (\sim A \wedge B)) \vee (B \vee \sim A)$

ء) $C = \sim (A \wedge B \wedge C) \vee ((\sim B \vee \sim A) \wedge \sim C)$

2) تحقق من سلامة (صحة) المعادلات التالية :

آ) $(A \wedge B) \wedge (B \vee A) = (A \vee B) \vee (B \wedge A)$

ب) $(\sim B \wedge \sim B) \wedge (\sim C \vee \sim A) = \sim ((A \wedge B) \wedge (C \vee A))$

جـ) $A \wedge B \wedge (C \wedge \sim A) = (A \wedge B \wedge C) \wedge \sim A$

ء) $\sim ((\sim A . \sim B) \wedge (C \vee A)) = \sim ((A \wedge B) \wedge (C \vee A))$

3) تحقق من صحة المعادلات التالية :

آ) $A \wedge B = \sim (A \vee B)$

ب) $\sim A \wedge \sim B = \sim (A \wedge B)$

جـ) $\sim (A \vee (\sim A \wedge \sim B)) = B \wedge (A \vee B)$

ء) $\sim (\sim A \wedge \sim B) = A \wedge B$

3) القضايا التالية معبر عنها باللغة الطبيعية ، حاول التحقيق فيها من خلال استخدام المنطق الرمزي . علماً بأن كل منها يحتوى على قرار ومعطية واحدة على الاقل .

آ) «من كل الأشياء في الدنيا نجد أن الاحساس الجيد good sense موزعاً بصورة عادلة . فكل إنسان يعتقد أنه يملك الكثير منه،حتى أولئك الذين يصعب إرضاءهم في الأمور الأخرى ، لا يرغبون الازدياد منه» .

دينيه ديكارت في كتاب (Discourse of Methods) .

ب) «لا رجل يقبل النصيحة ، ولكن كل رجل يقبل المال . ولهذا فإن المال أفضل من النصيحة» .

جوناثان سويفت .

جـ) «ما دامت السعادة تكمن في راحة البال . وطالما أن درجة راحة البال تعتمد على مدى ثقتنا في المستقبل . . وطالما أن هذه الثقة مبنية على ما لدينا من علوم عن

الذات الآلهية والنفس (البشرية)، لهذا فإن العلوم ضرورية من أجل السعادة الحقيقية» .

غوتغريد و. فون لايبنتز Preface to the General Science

ء) «بامعان النظر في قشرة بيض الدجاج التي تبدو قاسية . . يخمّن الشخص كيف تستطيع البيضة إمتصاص الأكسجين اللازم لحياة وتطور الجنين بداخلها . من الواضح أن القشرة يجب أن تكون قادرة على تمرير الأكسجين . ولهذا يجب أن تحتوى على فتحات holes من الكبر بحيث تسمح لجزيئات الأكسجين بالدخول» .

هينتون H.E.Hinton في كتاب (Insect Eggshells) .

الجبر البوولي Boolean Algebra :

أدرك الرياض الانجليزي جورج بوول غياب منهاج رياضي رسمي يمكن استخدامه في التعبير عن مفاهيم المنطق الرمزي ، فجلس لمعالجة هذه القضية العلمية . وكانت نتيجة دراسته هذه ظهور نظام جبري جديد عرف باسم الجبر البوولي نسبة لصاحبه . وقد وجد هذا الجبر من مجالات التطبيق بما لم يحلم به جورج بوول نفسه .

يختلف الجبر البوولي عن الجبر العادي في كون أن الأخير نطاقه فئة الأرقام الحقيقية Real Numbers . أما الجبر البوولي فنطاقه يتألف من قيمتين فقط هما الصفر 0 والواحد 1 . بمعنى أن المتغير البوولي Boolean Variable يمكن أن يأخذ إحدى هذين القيمتين فقط (وهذا ما يسمى على وجه التحديد بالجبر البوولي ذو العنصرين) .

العمليات المنطقية في الجبر البوولي :

عمليات الجبر البوولي ثلاثة : وهي شبيهة بالعمليات التي ذكرناها في فقرة المنطق الرمزي . هذه العمليات هي :

1)الضرب المنطقي Logical Multiplicatim :

وهذه العملية مكافئة لعملية الارتباط المنطقي السابقة الذكر . أما أداة الربط هنا فهي النقطة «.» بدلاً من الرمز «∧» .

جدول الضرب المنطقي في الجبر البوولي يكون كالتالي :

.	0	1	متغير B
0	0	0	
1	0	1	

متغير A — A.B

كما نلاحظ من الجدول السابق فإن «0» قد حل محل «F» ، و «1» حل محل «T» .

2)الجمع المنطقي **Logical Addition** :

وهذه العملية مكافئة لعملية الفصل المنطقي المذكورة . وهنا يستخدم الرمز «+» بدلاً من الرمز «∨» . جدول الجمع المنطقي يكون كالتالي :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

B (columns), A (rows) — A+B

3)العكس (أو النفي) **Negation** :

ويرمز لعملية العكس أو النفي هنا بالرمز (—) أي الشرطه توضع فوق المتغير . أي أن الرمز «—» مكافىء للرمز «~» . جدول النفي يكون كالتالي :

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

نلاحظ أن معاملا الضرب والجمع المنطقي يسميان : معامل ثنائي Binary ، فيما يسمى معامل النفي المنطقي بالمعامل الاحادي Unary .

***القوانين الأساسية في الجبر البوولي :**

للجبر البوولي ثلاثة قوانين رئيسية هي :

الاول : قانون التبديل Communicative law . وينص على أن :

$$A + B = B + A$$

وأن $A . B = B . A$

الثاني : قانون الترتيب Associative Law . وينص على ان :

$$(C+B)+A=C+(B+A)$$

$$(C.B).A=C.(B.A)$$

الثالث : قانون التوزيع Distributive Law . وينص على أن :

$$(A+B).C=A.C+B.C$$

القوانين السابقة صحيحة ولا داعي لبرهنتها . ويمكن للقارىء التأكد منها باستخدام جداول الصدق . أو باستخدام ما ذكرناه من عمليات الجبر البوولي وجداولها .

الجبر البوولي والبرمجة :

أثناء وضع البرامج (تصميمها) تصادفنا نقاط اختيار لابد من وضعها . وكثيراً ما تكون نقاط الاختبار هذه ذات طبيعة ثنائية ويتم الاعلان عن المتغيرات المستخدمة فيها على أنها من النوع البوولي Boolean Variable . بعضاً منها يسمى «راية Flag» بووليه .

الجبر البوولي والتصاميم المنطقية :

كان لوضع الجبر البوولي وتطويره بهذا الشكل أثراً كبيراً في بلورة مفاهيم المنطق الرياضي (أو الرقمي) المستخدم في تصميم الدارات الالكترونية Electronic Circuits . وهو المجال المسمى بمجال التصاميم المنطقية Logical design . نستطيع القول إذن أنه لولا مفاهيم الجبر البوولي لما كانت هناك كل هذه القطع الالكترونية من دوائر متكاملة (IC) ورقاقات chips إلكترونية داخلة في التركيبة الصلبة للحاسب الإلكتروني . والسبب في ذلك يرجع إلى الطبيعة الثنائية في عمل هذه الدارات . فالتيار إما أن يكون ساري 1=ON أو منقطع O=off .

التصاميم المنطقية Logical Designes :

سبقت الاشارة إلى ثلاث علاقات منطقية وهي : الضرب المنطقي ، الجمع المنطقي ، والعكس المنطقي . هذه العمليات يمكن وضعها فيزيائياً باستخدام عدد من الدوائر المنطقية المكافئة لها وتسمى بوابات ، والبوابة Gate هي دارة الكترونية تعمل على واحدة أو أكثر من إشارات الدخل Input Signal لتنتج إشارات خرج Output . أهم هذه البوابات ثلاث وهي :

أولاً : بوابة OR :

الشكل العام لهذه البوابة كما يلي :

هذه البوابة تحقق المعادلة : X+Y=Z ، حيث :

Y,X : إشارتي دخل ، كل بقيمة 0 أو 1 في أي وقت .

أما Z فهي اشارة الخرج ، وتحتمل قيمة 0 أو 1 وفقاً لقيمة Y,X .

الجدول التالي يوضح كل احتمالات Z وفقاً لتباديل الاحتمالات في X و Y.

X	Y	Z=X+Y	
0	0	0	0+0=0
0	1	1	0+1=1
1	0	1	1+0=1
1	1	1	1+1=1

نلاحظ أن هذا الجدول مكافىء لجدو الصدق (A∨B) ، أي أن بوابة OR تقوم بعمليات الجمع المنطقي .

عند رسم بوابة OR ، قد يكتب بداخلها الرمز «OR» أو «+» للدلالة على نوع العملية وتمييزها عن غيرها من العمليات :

X, Y → [OR] → Z   X, Y → [+] → Z

ثانياً : بوابة AND :

الشكل العام لهذه البوابة هو :

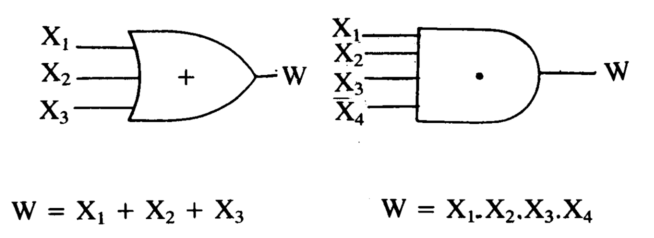
X, Y → [AND] → Z

حيث X.Y=Z . وتكون أما 0 أو 1 وفقاً لقيمة Y,X كما هو موضح بالجدول التالي :

X	Y	Z=X.Y	
0	0	0	0.0=0
0	1	0	0.1=0
1	0	0	1.0=0
1	1	1	1.1=1

نلاحظ أن هذا الجدول مكافىء للجدول (A∧B=C) . أي أن بوابة AND تقوم باجراء عمليات الضرب المنطقي . ولهذا فعند رسم هذه البوابة توضع علامة تمييزها عن غيرها من العمليات . فاما توضع « . » ، أو «AG» إختصاراً لـ AND Gate.

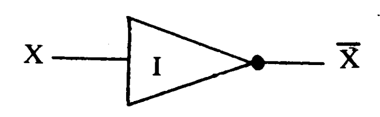
نشير إلى أن عدد الدخل Input لكل من بوابة AND و OR ليس محدداً بعنصرين فقد يكون اكثر من ذلك :



$W = X_1 + X_2 + X_3$ $\qquad$ $W = X_1.X_2.X_3.X_4$

ثالثاً : بوابة NOT (أو العاكس Inverter) :

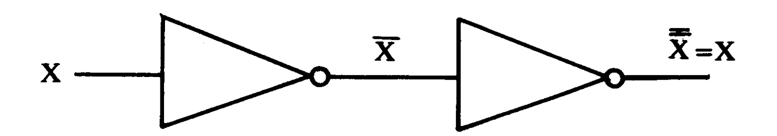
الشكل العام لهذه البوابة هو :



حيث $\overline{X}$ هي معكوس المتغير X . أما «I» فهي علامة العلاقة ، (اختصار Inverter) . $\overline{X}$ يسمى أيضاً متمم X . الجدول التالي يبين احتمالات الدخل والخرج في هذه العلاقة :

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

نلاحظ أنه لو عكسنا $\overline{X}$ فسنرجع إلى X . حيث $X=\overline{\overline{X}}$ ، وهي العلاقة التي يعبر عنها جبرياً بـ : $-(-X) = X$. ويعبر عنها تخطيطياً بالتالي :



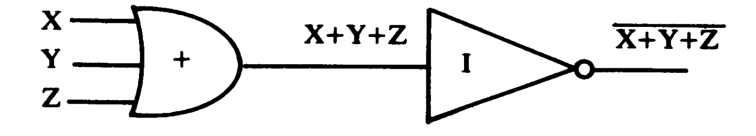
بالاضافة إلى الرسم السابق يمكن رسم بوابة NOT (أو العاكس) على شكل دائرة صغيرة :

A —o— $\overline{A}$

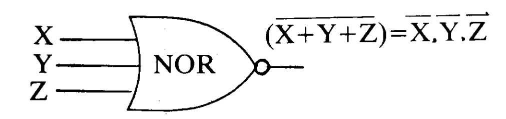
وباستخدام هذه البوابة مع كل من بوابة AND و OR نحصل على بوابتين جديدتين هما : بوابة NAND وبوابة NOR .

بوابة NOR :

الشكل العام لهذه البوابة هو :

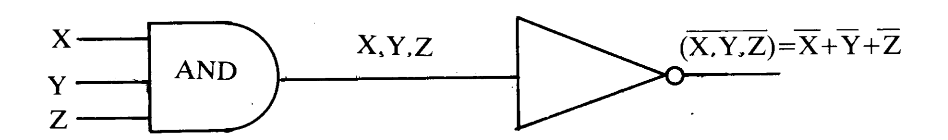


الشكل الآخر لرسم هذه البوابة هو :

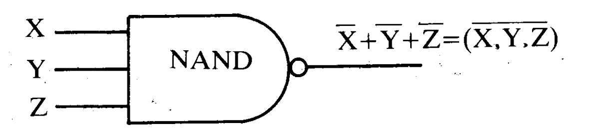


بوابة NAND :

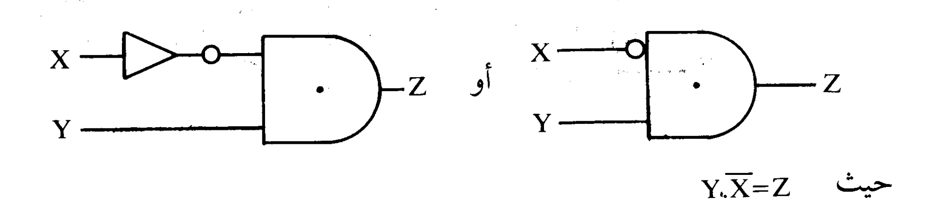
الشكل العام لهذه البوابة هو :



ويمكن اختصار الرسم السابق إلى الرسم التالي :

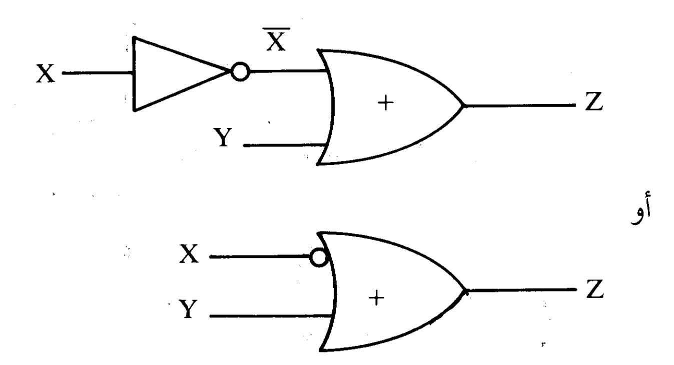


هناك بعض الدوال البوولية Boolean Function حيث نجد معكوس المتغير مضروباً (منطقياً) في متغير آخر . أي نجد دالة بوولية أحد متغيراتها معكوساً . وهنا يتم التعبير عنه باحدى الشكلين التاليين :



حيث $Y.\overline{X}=Z$

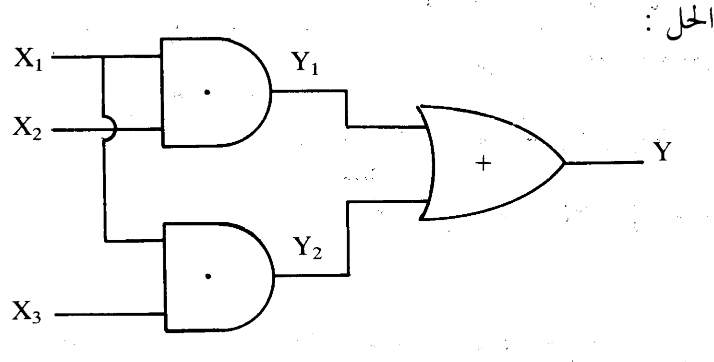
وقد تكون الدالة عملية جمع منطقي يكون أحد متغيراتها معكوساً . فالدالة $Z = Y+\overline{X}$ يمكن التعبير عنها باحد الشكلين التاليين :



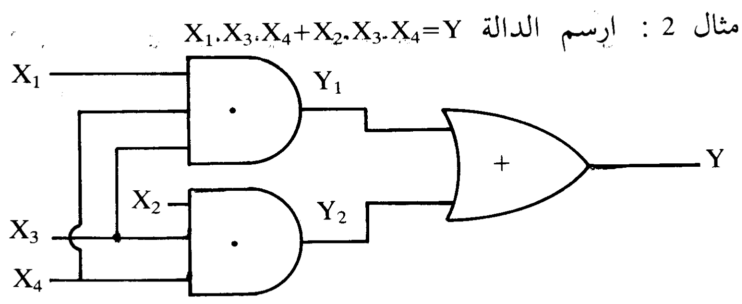
بالرغم من أهمية بوابتي NAND و NOR فسنكتفي باستخدام الرموز الثلاثة لكل من بوابات NOT, OR, AND . واليك بعض الامثلة

مثال 1 : ارسم الدالة $X_1.X_2+X_1.X_3=Y$

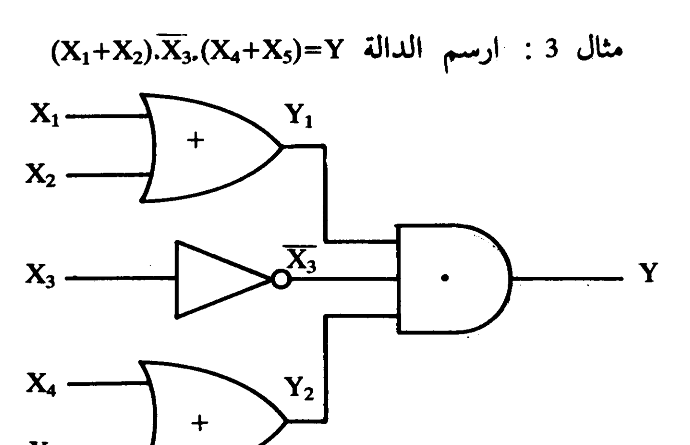
الحل :



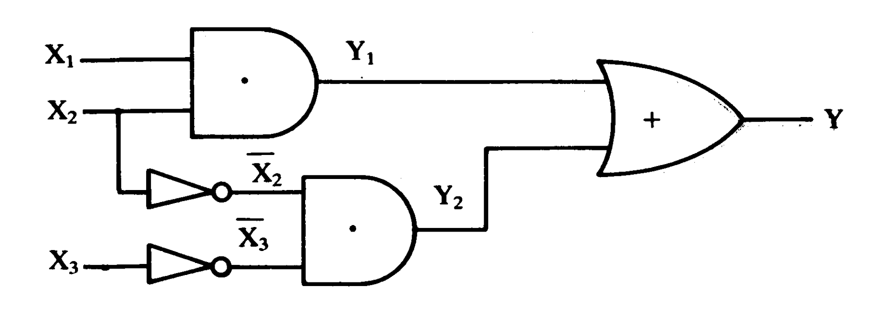
مثال 2 : ارسم الدالة $X_1.X_3.X_4+X_2.X_3.X_4=Y$



مثال 3 : ارسم الدالة $Y = (X_1+X_2).\overline{X_3}.(X_4+X_5)$



مثال 4 : ارسم الدالة $Y = X_1.X_2+\overline{X_2}.\overline{X_3}$



في حل الامثلة السابقة لم يتم استخدام جداول الصدق جميع احتمالات الدالة Y وفقاً لاحتمالات قيمة المتغيرات فيها . هذه الجداول تسمى ايضاً جداول التباديل Combinations table .

تمارين عامة :

١) إرسم الدوال التالية :

أ) $(\overline{X_1}+X_2).X_3.X_4=Y$

ب) $(X_1+\overline{X_2}).X_3.X_4=Y$

جـ) $(\overline{X_1}.X_2)+(\overline{X_3}.X_4)=Y$

ء) $(X_1.\overline{X_2})+(X_3.X_4)=Y$

هـ) $(X_1.\overline{X_2}.\overline{X_3})+(X_1.X_2.X_3)=(X_1.X_2.\overline{X_3})=Y$

2) ارسم الدوال التالية مع تجهيز جداول الصدق :

أ) $(X_1.X_2.X_3)+(X_1.\overline{X_2}.X_3)+X_2.\overline{X_3}.\overline{X_4}=Y$

ب) $X_1.X_2+\overline{X_2}.\overline{X_3}=Y$

جـ) $\overline{X_1}.X_2.\overline{X_3}=Y$

ء) $\overline{X_1+\overline{X_2}+X_3}=Y$

هـ) $\overline{\overline{X_2.\overline{X_3}}+X_1.X_2}=Y$

3) ارسم الدوال التالية مع استخدام جداول التباديل :

أ) $X_1.(X_3+\overline{(X_1.X_2)})=Y$

ب) $X_1+(X_3.\overline{(X_1+X_2)})=Y$

جـ) $\overline{X_1}.(\overline{X_3}+(X_1.X_2))=Y$

ء) $\overline{X_1}+(\overline{X_3}.(X_1+X_2))=Y$

هـ) $\overline{(X_1+X_3)}.(X_1.X_2)=Y$

المراجع

1) Ligomenides, P.A. Information Processing Machines.
N.Y.: Holt, Rinehart and winston 1969
2) Copi, I.M. Introduction to Logic. 4th Ed. N.Y.: Macmillan Pub. Co., 1972.
3) Salmon, W.C. Logic. 2nd Ed. Englewood cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1973.
4) Ryan, R. Basic Digital Electronics. Blue Ridge Summit, Pa.: Tab Books, 1975.
5) Roth, C.H.Jr Fundamentals of Logic Design. 2nd Ed. St. paul: West Pub. Co., 1979.
6) Bartee, T.C.Digital Computer Fundamentals. Tokyo: MaGraw-Hill Kogakush, 1977.
7) Ralston, A. Introduction to programming and computer Science. N.Y· McGraw-Hill Book Co., 1971.

